LINEER MODELLER.

1. Matris ve Vektör Gösterimi:

Matris, değişken veya sayıların karesel veya dikdörtgensel dizilişidir. Örneğin, 3 öğrenci için boy uzunluğu ve kiloları aşağıdaki matrisle verilmiştir.

$$A = \begin{bmatrix} 65 & 154 \\ 73 & 182 \\ 68 & 167 \end{bmatrix}$$

A matrisinin elemanları

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. i.nci satır j.inci sütundaki sayı a_{ij} ile ifade edilir. Ve matris elemanları cinsinden $A = (a_{ij})$ şeklinde gösterilir. Yukarıdaki matris 3 satır 2 sütunlu olduğundan A'nın boyutu 3x2 dir.

Vektör ise tek satır veya tek sütunlu matrislere denir.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Satır vektörleri sütun vektörünün transpozu olarak kabul edilir.

$$x' = (x_1 \ x_2 \ x_3)$$

Geometrik olarak, p elemanlı satır/sütun vektörü p boyutlu uzayda bir nokta ile ilişkilendirilir. Matris ve vektörlerle işlem yapıldığında tek bir sayı skaler olarak isimlendirilir.

İki matris veya vektör aynı boyutta ve karşılıklı elemanları eşit ise bu iki matris veya vektöre eşittir denir.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = B$$

$A = B$ dir.

A matrisinin satır ve sütunlarının yer değiştirilmesi ile elde edilen matrise A'nın transpozu denir ve A' ile gösterilir.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 1 \\ -2 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$A = (a_{ij}) \Rightarrow A' = (a_{ij})' = (a_{ji})$ olur.

Eğer bir matrisin iki kez transpozu alınırsa elde edilen matris kendisi olacaktır.

$$(A')' = A$$

$$A = (a_{ij}) \Rightarrow A' = (a_{ij})' = (a_{ji})$$

$$\Rightarrow (A')' = (a_{ji})' = (a_{ij}) = A \text{ olur.}$$

1.1. Özel Matris formları

Bir matrisin transpozu kendisine eşit ise yani $A' = A$ veya $(a_{ij}) = (a_{ji})$ ise A'ya simetrik Matris denir.

örneğin, $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 10 & -7 \\ 6 & -7 & 9 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

simetrik matristir.

Açıkça görüldüğü gibi tüm simetrik matrisler kare matrislerdir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{bmatrix}_{p \times p}$$

$p \times p$ boyutlu $A = (a_{ij})$ kare matrisinin köşegeni $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{pp}$ elemanlarını içerir. Köşegen dışındaki tüm elemanlar sıfır ise bu matrise köşegen matris denir.

$$D = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Aynı zamanda $D = diag(8, -3, 0, 4)$ ile de gösterilir.

Köşegen elemanları 1'lerden oluşan matrise birim matris denir ve I ile gösterilir. örneğin,

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Köşegen altındaki elemanları sıfır olan bir kare matrise üst üçgensel matris denir.

$$T = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Elemanları 1'lerden oluşan bir vektör

$$J = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

ve bir kare matris

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2. İşlemler :

1.2.1. İki matris veya vektörün toplamı

İki matris veya vektör aynı boyutta ise bu matris veya vektörlere toplanabilirdirler denir. Toplamları karşılıklı elemanlarının birbiri ile toplanması ile elde edilir. A ve B, nxp boyutlu matrisler ise $C = A + B$ de nxp boyutlu bir matristir. $C\,(c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$ ile hesaplanır.

Örnek

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 2 & 8 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 5 & -6 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 2 & -2 \\ 5 & 12 & -3 \end{pmatrix}$$

Aynı boyutlu A ve B matrisleri için $D = A - B$ farkı da benzer şekilde tanımlanır.

Matris toplamının iki özelliği aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem

Eğer A ve B nxm boyutlu matrisler ise,

1. $A + B = B + A$
2. $(A \pm B)' = A' \mp B'$

1.2.2. Bir matris ve bir skalerin çarpımı

Herhangi bir matris ile herhangi bir skaler çarpılabilir. Bir matris ile bir skalerin çarpımı matrisin tüm elemanları ile skalerin çarpımı şeklinde tanımlanır.

$$c \cdot A = (c a_{ij}) = \begin{pmatrix} c a_{11} & c a_{12} & \cdots & c a_{1m} \\ \vdots & c a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c a_{n1} & c a_{n2} & \cdots & c a_{nm} \end{pmatrix}$$

$c.a_{ij} = a_{ij}.c$ olduğundan bir skaler ile bir matrisin çarpımı değişme özelliğine sahiptir.

1.2.3. İki matris veya iki vektörün çarpımı

AB çarpımının tanımlı olabilmesi için A matrisinin sütun sayısı, B matrisinin satır sayısına eşit olmalıdır. $C = AB$ çarpımının (ij). elemanı

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

ile tanımlanır. Yani, A'nın i. satır elemanları ile j. sütun elemanlarının toplamıdır. Eğer A matrisi $n \times m$ boyutlu ve B matrisi de $m \times p$ boyutlu ise $C = AB$ matrisi $n \times p$ boyutlu bir matristir.

Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

matrisleri verilsin.

$$AB = \begin{pmatrix} 2.1 + 1.2 + 3.3 & 2.4 + 1.6 + 3.8 \\ 4.1 + 6.2 + 5.3 & 4.4 + 6.6 + 5.8 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 13 & 38 \\ 31 & 92 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 18 & 25 & 23 \\ 28 & 38 & 36 \\ 38 & 51 & 49 \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur.

NOT

Matris çarpımlarının tanımı gereği 1×1 boyutundaki bir A matrisi $1 \times n$ boyutundaki bir B matrisi ile sağdan veya $n \times 1$ boyutundaki bir C matrisi ile sol taraftan çarpılabilir olmasına rağmen bir skaler herhangi bir boyuttaki matris ile sağdan veya soldan çarpılabilmektedir.

Eğer A, $n \times m$ ve B, $m \times p$, $n \neq p$ ise AB tanımlıdır. Ancak, BA tanımlı değildir.